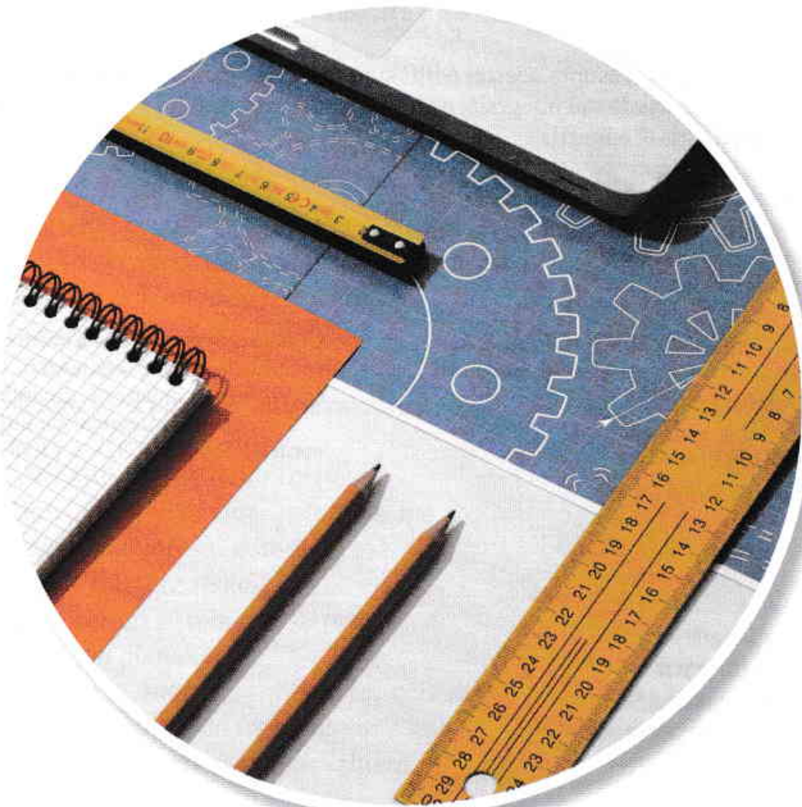
MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONSTANTIN BASARAB
CĂTĂLIN CRISTEA
DĂNUȚ DRĂCEA

Matematică

clasa a VII-a

7



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ

LIBRIS We know books

CUPRINS

COMPETENȚE GENERALE ȘI COMPETENȚE SPECIFICE

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$.
1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame
1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date
1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date
1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora
2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri
2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora
3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii

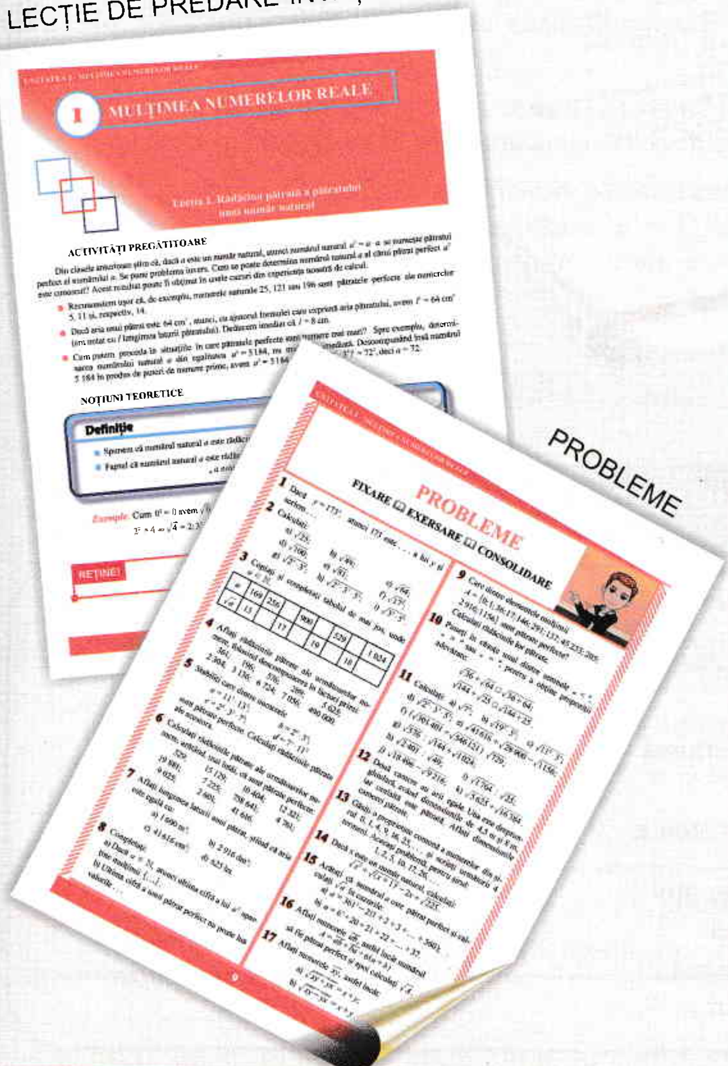
MANUALUL LETRIC

Manualul este structurat pe 7 unități de învățare, care respectă programa școlară. Acestea se finalizează printr-o recapitulare și teste de evaluare. Fiecare unitate de învățare conține activități pregătitoare și noțiuni teoretice, metode de calcul matematic, probleme rezolvate, cât și exerciții de consolidare.

Manualul propune instrumente complementare de evaluare a activității: portofoliu, proiect, investigație, observarea sistematică a activității și a comportamentului elevului.

Metoda didactică este interdisciplinară.

LECȚIE DE PREDARE-ÎNVĂȚARE



PROBLEME

RUBRICILE MANUALULUI

Activități pregătitoare – elevul își reamintește noțiuni învățate care îl ajută la buna înțelegere a noilor conținuturi

Noțiuni teoretice – conținuturile prevăzute de programa școlară, însoțite de exemple concludente, modele de rezolvare

Comentariu – informații suplimentare legate de noile noțiuni predate

Reține – sintetizarea elementelor noi de conținut prin concluzii, reluarea unor idei esențiale, prezentarea unor scheme, formule

Investigație - oferă elevului posibilitatea de a rezolva o sarcină de lucru, în mod creator, în situații de învățare noi sau mai puțin asemănătoare cu cele desfășurate la clasă

Temă pentru portofoliu – activitate individuală sau în grup desfășurată prin parcurgerea unor etape bine stabilite

Probleme rezolvate – explicare și detaliere practică pentru rezolvarea unor tipuri de exerciții și probleme referitoare la cunoștințele nou dobândite

Probleme – Fixare. Exersare. Consolidare – activități eșalonate în funcție de gradul de dificultate și de parcurgerea conținuturilor în cadrul unității de învățare

Probleme recapitulative – aprofundarea noilor conținuturi prin exersarea practică

Evaluare – exerciții și probleme corespunzătoare fiecărei unități în parte. Itemi de evaluare: obiectivi, semiobiectivi, subiectivi

Autoevaluare – conștientizarea în mod independent a rezultatelor obținute în procesul de învățare

I MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

ACTIVITĂȚI PREGĂTITOARE

Din clasele anterioare știm că, dacă a este un număr natural, atunci numărul natural $a^2 = a \cdot a$ se numește pătratul perfect al numărului a. Se pune problema invers. Cum se poate determina numărul natural a al cărui pătrat perfect a^2 este cunoscut? Acest rezultat poate fi obținut în unele cazuri din experiența noastră de calcul.

- Recunoaștem ușor că, de exemplu, numerele naturale 25, 121 sau 196 sunt pătratele perfecte ale numerelor 5, 11 și, respectiv, 14.
- Dacă aria unui pătrat este 64 cm^2, atunci, cu ajutorul formulei care exprimă aria pătratului, avem $l^2 = 64 \text{ cm}^2$ (am notat cu l lungimea laturii pătratului). Deducem imediat că $l = 8$ cm.
- Cum putem proceda în situațiile în care pătratele perfecte sunt numere mai mari? Spre exemplu, determinarea numărului natural a din egalitatea $a^2 = 5\,184$, nu mai este imediată. Descompunând însă numărul 5 184 în produs de puteri de numere prime, avem $a^2 = 5\,184 = 2^6 \cdot 3^4 = (2^3 \cdot 3^2)^2 = 72^2$, deci $a = 72$.

NOȚIUNI TEORETICE

Definiție

- Spunem că numărul natural a este rădăcina pătrată a numărului b dacă $a^2 = b$.
- Faptul că numărul natural a este rădăcina pătrată a lui b se scrie $a = \sqrt{b}$. Se citește: *„a este egal cu radical din b".*

Exemple: Cum $0^2 = 0$ avem $\sqrt{0} = 0$, din $1^2 = 1$ obținem $\sqrt{1} = 1$. Similar avem:

$$2^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2;\ 3^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3;\ 4^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4;\ 5^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5.$$

REȚINE!

$a^2 = b \Rightarrow a = \sqrt{b}$, pentru orice $a \in \mathbb{N}$.

$\sqrt{a^2} = a$, pentru orice $a \in \mathbb{N}$.

Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

Prezentăm câteva modalități de calcul al rădăcinii pătrate a unui pătrat perfect:

A. Metoda bazată pe descompunerea numărului în factori primi

- ✓ Scriem numărul ca produs de puteri de numere prime. Numărul fiind pătrat perfect, fiecare factor prim apare la o putere pară.
- ✓ Scriem numărul sub forma unei puteri cu exponentul 2.
- ✓ Rădăcina pătrată a numărului este egală cu baza puterii.

Exemple: **1.** $441 = 3^2 \cdot 7^2 = (3 \cdot 7)^2 = 21^2$, deci $\sqrt{441} = 21$. **2.** $144 = 2^4 \cdot 3^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 12^2$, deci $\sqrt{144} = 12$.

3. $57\,600 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^4 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 240^2$, deci $\sqrt{57\,600} = 240$.

B. O metodă pentru pătratele perfecte cu cel mult patru cifre

Ne propunem să exprimăm rădăcina pătrată a unui număr pătrat perfect de trei sau patru cifre. Împărțim de la dreapta la stânga numărul în două grupe, cea din dreapta având două cifre. Determinăm ușor cea mai mare cifră al cărei pătrat este mai mic sau egal cu numărul din grupa din stânga. Se ține cont apoi de ultima cifră a unui pătrat perfect pentru determinarea celei de-a doua cifre.

Exemple: **1.** Numărul 961 are prima grupă formată din numărul 9 și cum $3^2 = 9$, deducem că $\sqrt{961} = \overline{3b}$. Cum ultima cifră a grupei a doua este 1, deducem că $b \in \{1, 9\}$. Obținem prin verificare că $\sqrt{961} = 31$.

2. Fie $b = 7\,291$. Cum prima grupă este 72, deducem că $\sqrt{7\,291} = \overline{8a}$. Cu ajutorul ultimei cifre putem afirma că singurele variante sunt numerele 81 sau 89.
Cum $81^2 \neq 7\,291$, dar $89^2 = 7\,291$, avem $\sqrt{7\,291} = 89$.

Comentariu

- Observăm că numărul 89 este prim, deci $7\,291 = 89^2$ este descompunerea în factori primi, descompunere ce se obține într-un timp relativ îndelungat.
- O metodă rapidă pentru calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect este aceea în care utilizăm facilitățile calculatorului electronic.

Probleme rezolvate

1 Calculați prin două metode $\sqrt{3\,136}$.

Soluție: Prima metodă: cu ajutorul descompunerii în factori primi. Avem:

$$3\,136 = 2^6 \cdot 7^2 = (2^3 \cdot 7)^2 = 56^2, \text{ deci } \sqrt{3\,136} = 56.$$

A doua metodă: cum numărul 3 136 are prima grupă 31, deducem că prima cifră a numărului căutat este 5 și ținând cont de ultima cifră a numărului 3 136, a doua cifră este 4 sau 6. Se verifică ușor $\sqrt{3\,136} = 56$.

2 Demonstrați că numărul $a = 6 + 12 + 18 + \ldots + 288$ este pătrat perfect și calculați $\sqrt{a}$.

Soluție: Putem scrie: $a = 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 48) = 6 \cdot \dfrac{48 \cdot 49}{2} = 3 \cdot 48 \cdot 49 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (4 \cdot 3 \cdot 7)^2 = 84^2$, deci $\sqrt{a} = 84$.

PROBLEME

FIXARE 🕮 EXERSARE 🕮 CONSOLIDARE

1 Dacă $y = 173^2$, atunci 173 este . . . a lui y și scriem . . .

2 Calculați:

a) $\sqrt{25}$; b) $\sqrt{49}$; c) $\sqrt{64}$;

d) $\sqrt{100}$; e) $\sqrt{81}$; f) $\sqrt{17^2}$;

g) $\sqrt{2^4 \cdot 3^6}$; h) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2}$; i) $\sqrt{3^2 \cdot 5^6}$.

3 Copiați și completați tabelul de mai jos, unde $a \in \mathbb{N}$.

a	169	256		900		529		1 024
$\sqrt{a}$	13		17		19		18	

4 Determinați rădăcinile pătrate ale următoarelor numere, folosind descompunerea în factori primi:
361; 196; 576; 289; 5 625;
2 304; 3 136; 6 724; 7 056; 490 000.

5 Stabiliți care dintre numerele

$a = 11^3 \cdot 13^3$; $b = 2^6 \cdot 5^4$;

$c = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2$; $d = 7^4 \cdot 11^3$

sunt pătrate perfecte. Calculați rădăcinile pătrate ale acestora.

6 Calculați rădăcinile pătrate ale următoarelor numere, arătând, mai întâi, că sunt pătrate perfecte:
529; 15 129; 10 404; 12 321;
19 881; 7 225; 758 641; 4 761;
9 025; 2 601; 41 616.

7 Determinați lungimea laturii unui pătrat, știind că aria este egală cu:

a) 1 600 m^2; b) 2 916 dm^2;

c) 41 616 cm^2; d) 625 ha.

8 Completați:

a) Dacă $a \in \mathbb{N}$, atunci ultima cifră a lui a^2 aparține mulțimii $\{\ldots\}$.

b) Ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate lua valorile . . .

9 Care dintre elementele mulțimii
$A = \{0; 1; 36; 17; 146; 291; 137; 45\,233; 205; 2\,916; 1\,156\}$ sunt pătrate perfecte?
Calculați rădăcinile lor pătrate.

10 Puneți în căsuțe unul dintre semnele „ < ", „ > " sau „ = ", pentru a obține propoziții adevărate:

$$\sqrt{36} + \sqrt{64} \,\square\, \sqrt{36 + 64};$$

$$\sqrt{144} + \sqrt{25} \,\square\, \sqrt{144 + 25}.$$

11 Calculați: a) $\sqrt{7^4}$; b) $\sqrt{19^2 \cdot 5^2}$; c) $\sqrt{11^2 \cdot 3^4}$;

d) $\sqrt{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2}$; e) $\sqrt{41\,616} + \sqrt{28\,900} - \sqrt{1156}$;

f) $(\sqrt{301\,401} + \sqrt{546\,121}) \cdot \sqrt{729}$;

g) $\sqrt{576} : \sqrt{144} + \sqrt{1\,024}$;

h) $\sqrt{2\,401} : \sqrt{49}$; i) $\sqrt{1\,764} : \sqrt{25}$;

j) $\sqrt{18\,496} - \sqrt{9\,216}$; k) $\sqrt{5\,625} + \sqrt{16\,384}$.

12 Două camere au arii egale. Una este dreptunghiulară, având dimensiunile de 4,5 m și 8 m, iar cealaltă este pătrată. Determinați dimensiunea camerei pătrate.

13 Găsiți o proprietate comună a numerelor din șirul 0, 1, 4, 9, 16, 25, . . . și scrieți următorii 4 termeni. Aceeași problemă, pentru șirul:
1, 2, 5, 10, 17, 26, . . .

14 Dacă x este un număr natural, calculați:

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2} - 2x + \sqrt{225}.$$

15 Arătați că numărul a este pătrat perfect și calculați $\sqrt{a}$ în cazurile:

a) $a = 361^2 - 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 360)$;

b) $a = 6^3 + 20 + 21 + 22 + \ldots + 37$.

16 Determinați numerele $\overline{ab}$, astfel încât numărul

$$A = \overline{ab} + \overline{ba} + 6(a + b)$$

să fie pătrat perfect și apoi calculați $\sqrt{A}$.

17 Determinați numerele $\overline{xy}$, astfel încât:

a) $\sqrt{\overline{xy} + \overline{yx}} = x + y$;

b) $\sqrt{\overline{xy} - \overline{yx}} = x + y$.

Lecția 2. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

ACTIVITĂȚI PREGĂTITOARE

- Ne propunem să estimăm lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ale cărui catete au lungimile de 2 cm și 3 cm. Notând cu a lungimea ipotenuzei și folosind teorema lui *Pitagora*, obținem $a^2 = 2^2 + 3^2 = 13\ \text{cm}^2$. Cum 13 nu este pătrat perfect, estimarea lungimii ipotenuzei se poate realiza prin încadrarea numărului 13 între două pătrate perfecte de numere naturale consecutive. Astfel, din $3^2 < 13 < 4^2$, avem $3^2 < a^2 < 4^2$. Deducem că putem estima lungimea ipotenuzei ca fiind cuprinsă între 3 cm și 4 cm. În lecția anterioară am arătat că dacă $a^2 = b$, atunci $a = \sqrt{b}$, unde a este număr natural, deci b pătrat perfect. Așadar, dacă $a^2 = 13$, atunci $a = \sqrt{13}$. Putem spune că $\sqrt{13}$ este cuprins între $\sqrt{3^2}$ și $\sqrt{4^2}$, adică $3 < \sqrt{13} < 4$.
- Dacă aria unui teren de formă pătrată este de $260\ \text{m}^2$, ne propunem să estimăm lungimea laturii pătratului. Cum numărul 260 nu este un pătrat perfect, încadrăm acest număr între două pătrate perfecte de numere naturale consecutive.
  Astfel, pătratul cu latura de 16 m are aria de $256\ \text{m}^2$, iar pătratul cu latura de 17 m are aria $289\ \text{m}^2$. Dacă notăm cu a lungimea laturii pătratului, avem $256 = 16^2 < a^2 = 260 < 289 = 17^2$, obținem $\sqrt{256} = 16 < a < 17 = \sqrt{289}$.
  Exemplul de mai sus ne îndreptățește să afirmăm că rădăcina pătrată a numărului 260 nu este un număr natural. Acest număr este cuprins între 16 și 17. Notăm acest număr cu $\sqrt{260}$ și avem: $16 < \sqrt{260} < 17$.

NOȚIUNI TEORETICE

Definiția rădăcinii pătrate a pătratului unui număr natural poate fi extinsă la rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional pozitiv.

Definiție

- Spunem că numărul rațional pozitiv a este rădăcina pătrată a numărului rațional pozitiv b dacă $b = a^2$.
- Faptul că numărul a este rădăcina pătrată a lui b, se scrie $a = \sqrt{b}$. Se citește: *„a este egal cu radical din b".*

REȚINE! $(\sqrt{b})^2 = b$, pentru orice număr rațional pozitiv b.

Exemple: $0,2^2 = 0,04 \Rightarrow \sqrt{0,04} = 0,2$; $0,3^2 = 0,09 \Rightarrow \sqrt{0,09} = 0,3$;
$0,11^2 = 0,0121 \Rightarrow \sqrt{0,0121} = 0,11$; $1,5^2 = 2,25 \Rightarrow \sqrt{2,25} = 1,5$;
$2,4^2 = 5,76 \Rightarrow \sqrt{5,76} = 2,4$.

REȚINE!

$a^2 = b \Rightarrow \sqrt{b} = a$, pentru orice $a \in \mathbb{Q}$, $a \geq 0$.

$\sqrt{a^2} = a$, pentru orice $a \in \mathbb{Q}$, $a \geq 0$.

Aproximări ale rădăcinii pătrate prin lipsă și prin adaos dintr-un număr rațional pozitiv

✓ Folosind calculatorul găsim pentru numărul $\sqrt{2}$ următoarea scriere:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$$

Așadar, putem încadra numărul $\sqrt{2}$ între două numere raționale astfel:

$$1 < \sqrt{2} < 2; \quad 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5; \quad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42; \quad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415; \text{ ș.a.m.d.}$$

Numerele raționale 1; 1,4; 1,41; 1,414; . . . reprezintă aproximări prin lipsă ale lui $\sqrt{2}$, iar numerele raționale 2; 1,5; 1,42; 1,415 reprezintă aproximări prin adaos. Observăm că diferențele dintre o aproximare prin adaos și cea corespunzătoare prin lipsă sunt respectiv egale cu:

a) pentru cazul cu 0 zecimale $2 - 1 = 1 = \frac{1}{10^0}$;

b) pentru aproximări cu o zecimală $1{,}5 - 1{,}4 = 0{,}1 = \frac{1}{10^1}$;

c) pentru aproximări cu două zecimale $1{,}42 - 1{,}41 = 0{,}01 = \frac{1}{10^2}$;

d) pentru aproximări cu trei zecimale $1{,}415 - 1{,}414 = 0{,}001 = \frac{1}{10^3}$; ș.a.m.d.

Astfel, aproximările făcute fie prin lipsă, fie prin adaos, cu n zecimale au o eroare mai mică decât $\frac{1}{10^n}$.

Comentariu

Putem scrie că $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ sau $\sqrt{2} \simeq 1{,}42$ unde semnul „ $\simeq$ " se citește „aproximativ egal cu".

Ambele aproximări au o eroare mai mică decât $\frac{1}{10^2}$.

Folosind acest procedeu oricărei rădăcini pătrate dintr-un număr rațional pozitiv, îi putem asocia aproximări prin lipsă și prin adaos de numere raționale cu erori mai mici ca $\frac{1}{10^n}$ cu $n \in \mathbb{N}$.

✓ Aplicațiile practice ne pot conduce, așa cum am avut în activitățile pregătitoare, la aproximarea unui număr în situația în care se cunoaște pătratul său, dar acest pătrat nu poate fi scris ca pătratul unui număr rațional. În acest caz putem *estima* valoarea radicalului, încadrând numărul între pătratele a două numere raționale.

Astfel, dacă $b^2 < a < c^2$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$, atunci $b < \sqrt{a} < c$.

În acest caz spunem că b este o aproximare prin lipsă, iar c o aproximare prin adaos a numărului $\sqrt{a}$.

Comentariu

Cu cât cele două pătrate ce încadrează numărul de sub radical sunt mai *„apropiate"*, cu atât estimarea radicalului este mai fină (mai bună).

Exemple: **1.** Ne propunem să estimăm valoarea lui $\sqrt{\frac{7}{3}}$. Scriem succesiv: $\frac{7}{3} = \frac{21}{9} = \frac{21}{3^2}$.

Cum $16 < 21 < 25$, avem $\frac{16}{9} < \frac{7}{3} < \frac{25}{9}$, de unde $\frac{4}{3} < \sqrt{\frac{7}{3}} < \frac{5}{3}$, adică numărul $\sqrt{\frac{7}{3}}$ este cuprins între numerele raționale $\frac{4}{3}$ și $\frac{5}{3}$.

2. Am văzut că $\sqrt{13}$ este un număr cuprins între 3 și 4. Pentru a obține o estimare mai fină, putem scrie: $13 = \frac{1\,300}{100} = \frac{1\,300}{10^2}$. Cum $36^2 < 1\,300 < 37^2$, obținem $\left(\frac{36}{10}\right)^2 < 13 < \left(\frac{37}{10}\right)^2$ și, deci $3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$ ceea ce constituie o estimare mai bună pentru $\sqrt{13}$ față de estimarea inițială. Numărul 3,6 este o aproximare cu o zecime prin lipsă, iar 3,7 este o aproximare cu o zecime prin adaos pentru $\sqrt{13}$. Dacă ne propunem o aproximare și mai fină, putem scrie $13 = \frac{130\,000}{10^4}$; $360^2 = 129\,600$; $361^2 = 130\,321$.

Deducem că $360^2 < 130\,000 < 361^2$, deci $\frac{360^2}{100^2} < 13 < \frac{361^2}{100^2}$, ceea ce constituie o estimare mai exactă a numărului rațional 13. Adică: $3{,}60 < \sqrt{13} < 3{,}61$. Numerele 3,60 și 3,61 reprezintă aproximări prin lipsă, respectiv adaos cu o sutime pentru $\sqrt{13}$.

Investigație

Spirala lui Arhimede

Prezentăm în continuare un procedeu geometric pentru estimarea radicalului unui număr natural, cunoscut sub numele de *Spirala lui Arhimede*.

Construim, cu ajutorul riglei gradate și a echerului, șapte triunghiuri dreptunghice astfel: primul triunghi OAB este dreptunghic în A și isoscel cu catetele de 1 cm. Al doilea triunghi, dreptunghic în B, este OBC cu $BC = 1$ cm. Al treilea triunghi, dreptunghic în C, este OCD cu $CD = 1$ cm.

În mod similar se construiesc triunghiurile dreptunghice ODE, OEF, OFG și OGH (vezi *figura* 1).

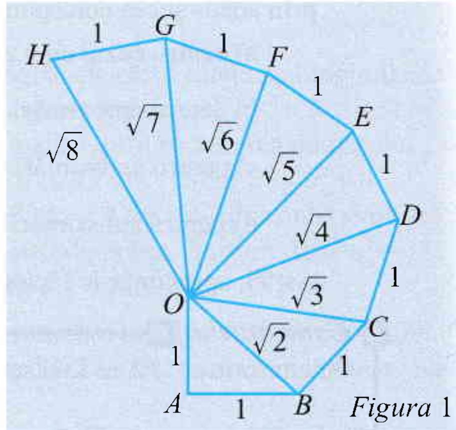


Figura 1

- Folosind teorema lui *Pitagora*, calculați OB, OC, OD, OE, OF, OG și OH;
- Cu ajutorul riglei gradate aproximați, cu o zecimală exactă, valorile obținute mai sus.

Organizați datele colectate într-un tabel ca cel de mai jos (prima înregistrare este dată ca model).

Segmentul	Lungimea (cm)	Aproximarea
OB	$\sqrt{2}$	1,4

Probleme rezolvate

1 a) Scrieți numărul 34 ca o sumă de două pătrate perfecte.
b) Estimați numărul $\sqrt{34}$, folosind o riglă gradată și un echer.

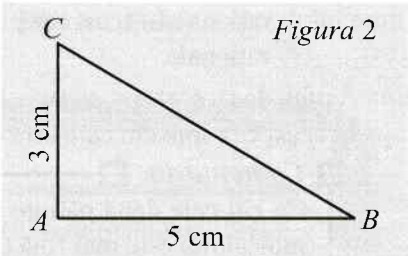


Figura 2

Soluție: a) $34 = 3^2 + 5^2$.

b) Desenăm triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 5$ cm; $AC = 3$ cm și $\hat{A} = 90^\circ$. Folosind teorema lui *Pitagora*, obținem $BC = \sqrt{34}$.
Măsurăm lungimea lui BC și obținem aproximativ $5,8$ cm.
Deci $\sqrt{34} \simeq 5,8$.

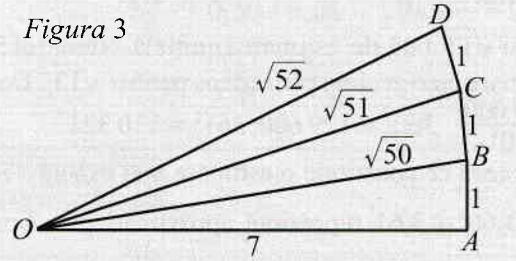
Realizați și voi, pe caietul de notițe, această construcție păstrând dimensiunile exacte.

2 a) Determinați cel mai mare pătrat perfect mai mic decât 52.
b) Folosind rigla gradată și echerul estimați numărul $\sqrt{52}$.

Soluție: a) Din $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, avem că 7^2 este cel mai mare pătrat perfect mai mic decât 52.

b) Construim triunghiul dreptunghic OAB cu catetele $OA = 7$ cm și respectiv $AB = 1$ cm.

Figura 3



Cu ajutorul teoremei lui *Pitagora*, avem $OB = \sqrt{50}$ cm. Construim triunghiul OBC, dreptunghic în B, cu cateta $BC = 1$ cm. Avem $OC = \sqrt{51}$ cm. Analog, se construiește triunghiul dreptunghic, OCD cu cateta $CD = 1$ cm. Se obține că $OD = \sqrt{52}$ cm. Cu ajutorul riglei gradate obținem o estimare pentru $\sqrt{52} \simeq 7,2$ cm.

PROBLEME

FIXARE 🕮 EXERSARE 🕮 CONSOLIDARE

1 Scrieți în ordine crescătoare pătratele perfecte cuprinse între 100 și 400. Realizați o estimare a numerelor:

$$\sqrt{372};\ \sqrt{195};\ \sqrt{228};\ \sqrt{322}.$$

2 Estimați numerele $\sqrt{13}; \sqrt{124}; \sqrt{3\,003}$ încadrându-le între două numere naturale consecutive.

3 Calculați cu o aproximare de o zecime prin lipsă numerele:

$$\frac{16}{9};\ \sqrt{8};\ \sqrt{300};\ \sqrt{2\,580}.$$

4 Estimați numerele $\frac{15}{7}; \sqrt{11}; \sqrt{200}; \sqrt{3\,148}; \frac{2}{3}; \sqrt{6}; \sqrt{414}; \sqrt{1\,000}$ cu aproximație de o zecime prin adaos.

5 Copiați și completați tabelul cu valorile aproximative ale lui $\sqrt{5}$:

	Prin lipsă	Prin adaos	Prin rotunjire
cu o unitate			
cu o zecime			
cu o sutime			

6 Arătați că $5,4^2 < 30 < 5,5^2$. Realizați două estimări cu aproximație de o unitate și respectiv o zecime ale lui $\sqrt{30}$.

7 Determinați numărul natural n, pentru care

$$n < \sqrt{505} < n+1.$$

8 Determinați numărul natural a, știind că $\sqrt{a}$ este cuprins între 2,6 și 2,7.

9 Determinați numărul natural n, știind că valoarea lui $\sqrt{n}$ cu o zecimală exactă este 4,5.

10 Desenați un dreptunghi cu lungimea de 10 cm și lățimea de 7 cm. Măsurați lungimea diagonalei dreptunghiului și estimați numărul $\sqrt{149}$.

11 Cu ajutorul teoremei lui *Pitagora*, folosind o riglă gradată și un echer, găsiți estimări ale numerelor $\sqrt{29}; \sqrt{45}; \sqrt{10}; \sqrt{13}; \sqrt{18}$ observând scrierea numerelor de sub radicali ca sumă a două pătrate perfecte.

12 a) Determinați cel mai mare număr natural mai mic decât 54 care se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte;

b) Folosind rezultatul de la punctul a), estimați cu ajutorul riglei gradate și a echerului numerele: $\sqrt{54}$ și $\sqrt{55}$;

c) Estimați geometric numerele $\sqrt{59}$ și $\sqrt{60}$ cât mai simplu posibil.

13 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, pentru orice număr natural n:

$a = 10n + 7$; $b = 5n + 18$; $c = 5n + 13$.

14 Arătați că următoarele numerele nu sunt pătrate perfecte, pentru orice număr natural k:

$a = 1^k + 5$; $b = 5^k + 7$; $c = 6^k + 6$;
$d = 10^k + 13$; $e = 15^k + 18$; $f = 31^k + 31$.

15 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. Justificați răspunsurile în cazul propozițiilor false.

a) Orice număr natural nu este pătrat perfect.

b) Există numere naturale care sunt pătrate perfecte.

c) Pătratul unui număr natural este totdeauna strict pozitiv.

d) Ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi 6.

e) Orice număr natural n are proprietatea că $n^2 + 25$ nu este pătrat perfect.

16 Încadrați numărul

$$x = \frac{\sqrt{157 - \sqrt{169}} + \sqrt{158 + \sqrt{121}}}{2}$$

între două numere întregi consecutive.

Lecția 3. Scoaterea factorilor de sub radical; introducerea factorilor sub radical

ACTIVITĂȚI PREGĂTITOARE

- Știm că numărul 36 este pătratul perfect al numărului 6, deci $\sqrt{36}=6$. Pe de altă parte $36=4\cdot 9=2^2\cdot 3^2$. Deoarece $\sqrt{4}=2$ și $\sqrt{9}=3$, putem scrie:
$$\sqrt{36}=\sqrt{2^2\cdot 9}=2\sqrt{9} \text{ sau } \sqrt{36}=\sqrt{4\cdot 3^2}=3\sqrt{4}.$$
- În mod similar putem scrie:
$$\sqrt{25^2\cdot\frac{1}{100}}=25\sqrt{\frac{1}{100}}=25\sqrt{0,01} \text{ sau } \sqrt{625\cdot\frac{1}{10^2}}=\frac{1}{10}\sqrt{625}.$$

NOȚIUNI TEORETICE

Scoaterea factorilor de sub radicali

Ne propunem să scriem sub o formă mai simplă rădăcina pătrată din numere raționale pozitive de forma
$$c=a^2\cdot b \text{ unde } a\in\mathbb{Q}_+ \text{ și } b\in\mathbb{Q}_+.$$

Avem succesiv $c=a^2\cdot b \Longrightarrow c=a^2\cdot(\sqrt{b})^2=(a\sqrt{b})^2$. Deci $\sqrt{c}=a\sqrt{b}$.

REȚINE! $\sqrt{a^2\cdot b}=a\sqrt{b}$, pentru orice $a\in\mathbb{Q}_+$ și $b\in\mathbb{Q}_+$.

În acest caz, spunem că am scos factorul a de sub radical.

Exemple: 1. $\sqrt{8}=\sqrt{2^2\cdot 2}=2\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$.

3. $\sqrt{216}=\sqrt{2^3\cdot 3^3}=\sqrt{(2\cdot 3)^2\cdot 2\cdot 3}=6\sqrt{6}$.

4. $\sqrt{\frac{72}{25}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot 3^2}{5^2}}=\sqrt{\left(\frac{2\cdot 3}{5}\right)^2\cdot 2}=\frac{6}{5}\sqrt{2}$.

Introducerea factorilor sub radicali

Formula de scoatere a factorilor de sub radicali o putem scrie și sub forma:
$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}.$$
În acest caz, spunem că am introdus factorul pozitiv a sub radical.

REȚINE! $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, pentru orice $a\in\mathbb{Q}_+$ și $b\in\mathbb{Q}_+$.

Exemple: 1. $\frac{1}{10}\sqrt{3}=\sqrt{\frac{1}{100}\cdot 3}=\sqrt{0,03}$.

2. $\frac{1}{3}\sqrt{21}=\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 21}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\sqrt{2,(3)}$.

Compararea radicalilor

Cu ajutorul introducerii factorilor sub radicali putem compara doi radicali, folosind proprietatea:

Dacă a și $b\in\mathbb{Q}_+$ cu $a<b$, atunci $\sqrt{a}<\sqrt{b}$.

Probleme rezolvate

1 Comparați numerele: a) $4\sqrt{3}$ și $5\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{6}$ și $7\sqrt{2}$.

Soluție:

a) $\left.\begin{array}{l} 4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48} \\ 5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{50} \\ \sqrt{48}<\sqrt{50} \end{array}\right\} \Longrightarrow 4\sqrt{3}<5\sqrt{2}.$

b) $\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{6}=\sqrt{3^2\cdot 6}=\sqrt{9\cdot 6}=\sqrt{54} \\ 7\sqrt{2}=\sqrt{7^2\cdot 2}=\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{98} \\ \sqrt{54}<\sqrt{98} \end{array}\right\} \Longrightarrow 3\sqrt{6}<7\sqrt{2}.$

2 Stabiliți semnul următoarelor numere: a) $7\sqrt{3}-6\sqrt{2}$; b) $10\sqrt{5}-16\sqrt{2}$.

Soluție:

a) $\left.\begin{array}{l} 7\sqrt{3}=\sqrt{7^2\cdot 3}=\sqrt{49\cdot 3}=\sqrt{147} \\ 6\sqrt{2}=\sqrt{6^2\cdot 2}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{72} \\ \sqrt{147}>\sqrt{72} \end{array}\right\} \Longrightarrow 7\sqrt{3}>6\sqrt{2} \Longrightarrow 7\sqrt{3}-6\sqrt{2}>0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ numărul $7\sqrt{3}-6\sqrt{2}$ este pozitiv.

b) $\left.\begin{array}{l} 10\sqrt{5}=\sqrt{10^2\cdot 5}=\sqrt{100\cdot 5}=\sqrt{500} \\ 16\sqrt{2}=\sqrt{16^2\cdot 2}=\sqrt{256\cdot 2}=\sqrt{512} \\ \sqrt{500}<\sqrt{512} \end{array}\right\} \Longrightarrow 10\sqrt{5}<16\sqrt{2} \Longrightarrow 10\sqrt{5}-16\sqrt{2}<0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ numărul $10\sqrt{5}-16\sqrt{2}$ este negativ.

3 Scoateți factorii de sub radicali: a) $\sqrt{11^4\cdot 4}$; b) $\sqrt{1\,620}$; c) $\sqrt{7^{4n+5}}, n\in\mathbb{N}$.

Soluție: a) $\sqrt{11^4\cdot 4}=\sqrt{11^4}\cdot\sqrt{4}=11^2\cdot 2=121\cdot 2=242.$

b) $\sqrt{1\,620}=3\cdot 3\cdot 2\cdot\sqrt{5}=18\sqrt{5}.$

1 620	2 · 5	2
162	2	
81	3	3
27	3	
9	3	3
3	3	
1	–	

c) $\sqrt{7^{4n+5}}=\sqrt{7^{4n+4+1}}=\sqrt{7^{4n+4}\cdot 7}=\sqrt{7^{4(n+1)}\cdot 7}=7^{2(n+1)}\cdot\sqrt{7}.$

PROBLEME

FIXARE 🕮 EXERSARE 🕮 CONSOLIDARE

1 Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{\ldots} \text{ și } \sqrt{a^2 b} = (\ldots) \cdot \sqrt{\ldots}.$$

2 Scrieți numerele următoare, introducând factorii sub radicali:

a) $3\sqrt{7}$; b) $2\sqrt{1,5}$; c) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{50}$;

d) $-2\sqrt{3}$; e) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{27}$; f) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{72}$;

g) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$; h) $1,2\sqrt{10}$.

3 Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{3^2 \cdot 7}$; b) $\sqrt{2^4 \cdot 3}$; c) $\sqrt{3^6 \cdot 5}$;

d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$; e) $\sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7}$; f) $\sqrt{2^7}$;

g) $\sqrt{3^5}$; h) $\sqrt{3^3 \cdot 5^3}$; i) $\sqrt{2^3 \cdot 3^7 \cdot 7}$.

4 Comparați numerele: a) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$;

b) $5\sqrt{32}$ și $6\sqrt{24}$; c) $5\sqrt{3}$ și $4\sqrt{6}$;

d) $-3\sqrt{5}$ și $-5\sqrt{3}$; e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ și $\frac{2}{\sqrt{5}}$;

f) $\frac{2}{5}\sqrt{10}$ și $\frac{3}{5}\sqrt{3}$; g) $2\sqrt{3}$ și $7\sqrt{2}$;

h) 23 și $4\sqrt{33}$; i) $4\sqrt{5}$ și $-2\sqrt{3}$.

5 Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{216}$; b) $\sqrt{120}$; c) $\sqrt{248}$; d) $\sqrt{1\,260}$;

e) $\sqrt{1\,620}$; f) $\sqrt{2\,250}$; g) $\sqrt{5\,760}$; h) $\sqrt{882}$;

i) $\sqrt{9\,072}$; j) $\sqrt{8\,820}$; k) $\sqrt{46\,128}$; l) $\sqrt{105\,903}$.

6 Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{2^{25} + 2^{24}}$; b) $\sqrt{5^{36} - 5^{34} - 5^{35}}$;

c) $\sqrt{3^{33} - 3^{32}}$; d) $\sqrt{2^{23} \cdot 3^{24} + 2^{24} \cdot 3^{23} - 6^{22}}$;

e) $\sqrt{3^4 + 3^5 + 3^6 - 4 \cdot 3^4}$; f) $\sqrt{6^{10} - 2^{11} \cdot 3^8}$;

g) $\sqrt{4^6 + 4^5 + 5 \cdot 4^4}$; h) $\sqrt{9^{10} - 9^8 - 9^7}$;

i) $\sqrt{4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^4 \cdot 10 - 4 \cdot 3^6}$.

7 Scoateți factorii de sub radicali, știind că $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sqrt{2^{2n}}$; b) $\sqrt{2^{2n+1}}$; c) $\sqrt{3^{2n+3}}$;

d) $\sqrt{5^{4n+5}}$; e) $\sqrt{2^{4n} \cdot 5^{6n+1}}$; f) $\sqrt{3^{2n+1} \cdot 5^{4n+2}}$;

g) $\sqrt{3^{4n+2} \cdot 6^{6n+1} \cdot 6}$; h) $\sqrt{12^{10n} \cdot 6^5 \cdot 2^3 \cdot 3^5}$;

i) $\sqrt{9^n \cdot 16^n \cdot 25^n}$.

8 Fie numărul $A = 2^{4n} \cdot 25^{n+1} - 4^{2n+2} \cdot 5^{2n}$.

a) Arătați că A este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Arătați că $\sqrt{A}$ este divizibil cu 3.

c) Determinați n pentru care $\sqrt{A}$ nu se divide cu 15.

9 Introduceți factorii sub radicali:

a) $2\sqrt{3}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{7}$; d) $11\sqrt{5}$;

e) $6\sqrt{2}$; f) $7\sqrt{3}$; g) $-3\sqrt{2}$;

h) $-4\sqrt{5}$; i) $-10\sqrt{3}$; j) $-12\sqrt{5}$.

10 Introduceți factorii sub radicali: a) $3\sqrt{\frac{2}{9}}$;

b) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{18}{5}}$; c) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$; d) $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{9}{25}}$;

e) $\frac{5}{3}\sqrt{0,12}$; f) $-6\sqrt{0,1}$; g) $1,4\sqrt{\frac{10}{7}}$;

h) $-2\sqrt{\frac{3}{2}}$; i) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{5}}$; j) $-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{28}{9}}$.

11 Arătați că dacă $a \geq b \geq 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{(a+b)^2}$ nu depinde de a.

12 a) Ordonați crescător numerele:

$$2\sqrt{7};\ 5;\ \sqrt{53};\ 3\sqrt{5}.$$

b) Ordonați descrescător numerele:

$$\sqrt{125};\ 14;\ 10\sqrt{2};\ \sqrt{131};\ \sqrt{121}.$$

13 Determinați numerele naturale a, b și c, astfel încât:

$\sqrt{84} = a\sqrt{21}$; $\sqrt{539} = b\sqrt{11}$; $\sqrt{867} = c \cdot \sqrt{3}$.

14 Arătați că $\sqrt{1 + 2 + \ldots + 100} = 5\sqrt{202}$.

15 a) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care $\sqrt{1 + 2 + \ldots + n} \in \mathbb{N}$.

b) Pentru valoarea $n = 8$ scoateți factorii de sub radical pentru expresia $\sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$.

16 Verificați dacă, pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, avem

$$\sqrt{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3} \in \mathbb{N}.$$

Lecția 4. Numere iraționale, exemple; mulțimea numerelor reale; incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

ACTIVITĂȚI PREGĂTITOARE

Numărul $\sqrt{2}$

În *figura* 4, triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu $\hat{A} = 90°$. Lungimea catetelor o alegem egală cu unitatea de lungime. $(AB = AC = 1)$.

Cu ajutorul teoremei lui *Pitagora* avem că $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Deducem că $BC = \sqrt{2}$.

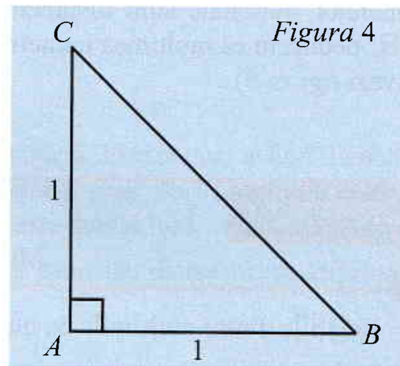


Figura 4

Am arătat că numărul $\sqrt{2}$ reprezintă lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel cu lungimea catetelor aleasă drept unitate de lungime.

Putem determina valori aproximative ale lui $\sqrt{2}$, măsurând lungimea lui BC. Se ridică în mod natural următoarea întrebare:

Este numărul $\sqrt{2}$ un număr rațional, adică se poate scrie $\sqrt{2}$ sub formă de fracție ordinară?

Vom arăta că răspunsul este negativ.

Acest rezultat este considerat de matematicieni drept al treilea rezultat ca importanță în istoria matematicii.

NOȚIUNI TEORETICE

Propoziție. Nu există niciun număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Demonstrație

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există un număr rațional $\frac{a}{b}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ și $b \neq 0$ astfel încât $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Putem presupune că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă (în caz contrar, o simplificăm și o înlocuim cu o fracție ireductibilă). Din faptul că $\frac{a^2}{b^2} = 2$, rezultă că $a^2 = 2b^2$, deci a^2 se divide cu 2. Atunci, a se divide cu 2, deci există $m \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = 2m$. Înlocuind în relația $a^2 = 2b^2$, obținem $b^2 = 2m^2$. Aceasta arată că b^2 se divide cu 2, deci și b se divide cu 2. Am obținut că a și b se divid cu 2, ceea ce contrazice faptul că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă.
Așadar, nu există niciun număr rațional al cărui pătrat să fie 2.

Concluzii

1. Am arătat că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional și spunem că $\sqrt{2}$ este irațional. Se poate demonstra (printr-o metodă asemănătoare celei prin care am arătat că $\sqrt{2}$ nu este rațional) că $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}$ nu sunt numere raționale.
2. În mod analog putem arăta că $\sqrt{p}$, cu p număr natural prim, nu este rațional. Din faptul că $\sqrt{2}$ nu este un număr rațional, deducem că $\sqrt{2}$ are o infinitate de zecimale care nu se succed periodic.
Putem construi și alte exemple de numere ale căror zecimale nu se succed periodic:
$$a = 0{,}010110111011110\ldots, \quad b = 0{,}12345678910111213\ldots$$
Aceste numere care nu sunt raționale constituie o altă mulțime de numere.

Definiție

- Mulțimea numerelor iraționale este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale cu o infinitate de zecimale care nu se succed periodic.
- Mulțimile de numere raționale și iraționale sunt disjuncte (nu au niciun element comun).
- Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale formează mulțimea numerelor reale. Această mulțime se notează cu $\mathbb{R}$.

Au loc relațiile de incluziune $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Din faptul că mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale sunt disjuncte, iar reuniunea lor este $\mathbb{R}$, deducem că mulțimea numerelor iraționale este $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (vezi *figura* 5).

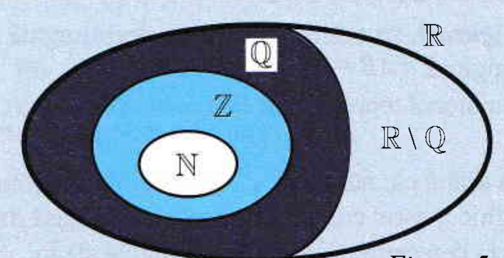


Figura 5

REȚINE!

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Mulțimea numerelor iraționale este mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Relațiile dintre mulțimile de numere studiate pot fi reprezentate prin diagrama din *Figura* 5.

Observații.

1. Cum ultima cifră a produsului a două numere naturale se obține ca ultimă cifră a produsului ultimelor cifre ale celor două numere, deducem că ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi 2, 3, 7 sau 8. Deci, numerele naturale de forma $\overline{\ldots 2}, \overline{\ldots 3}, \overline{\ldots 7}$ sau $\overline{\ldots 8}$ nu sunt pătrate perfecte. Pentru toate aceste numere radicalii lor sunt numere iraționale.
2. Dacă $n \in \mathbb{N}$ și există $p \in \mathbb{N}$, p număr prim, astfel încât $n \vdots p$, dar $n \not\vdots p^2$, atunci n nu este pătrat perfect și, deci $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

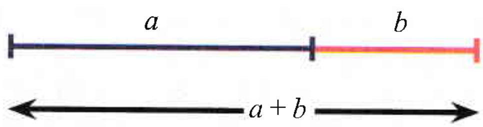
REȚINE! Dacă n este un număr natural care nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Comentariu - Scurt istoric

Denumirea numărului rațional nu este legată, așa cum s-ar putea crede, de cuvântul *„rațiune"*, ci provine din cuvântul latin *„ratio"* cu înțelesul de raport. Deci numerele raționale sunt cele ce pot fi scrise sub formă de rapoarte (de numere întregi), spre deosebire de cele iraționale.

Școala lui *Pitagora* susținea că toate numerele pot fi scrise ca raportul unor numere întregi, altfel spus se susținea că toate numerele sunt raționale. *Hippasos* a descoperit în secolul V î.Hr. că există un număr care nu este nici întreg și nici măcar raportul a două numere întregi.

Acest număr notat „ φ ", (se citește „ fi "), este faimosul *raport de aur* sau *numărul de aur.*



Secțiunea de aur a segmentului din desen este realizată atunci când raportul dintre $a+b$ și a este egal cu raportul dintre a și b. Din ecuația $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi$ se obține soluția $\varphi \approx 1{,}6180339887\ldots$

Conform unor relatări, faptul că *Hippasos* a demonstrat existența numerelor iraționale a determinat pedepsirea acestuia. Astfel, legenda spune că, pentru acest lucru, ar fi fost aruncat în apa mării.

Numărul π

Realizăm următorul exercițiu practic:

Cu ajutorul unui compas, trasăm pe un carton cercuri cu raza de 5 cm, 10 cm și 20 cm, deci având diametrele $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 20$ cm și $d_3 = 40$ cm. Decupăm cercurile, măsurăm apoi cu ajutorul unei sfori lungimile celor trei cercuri, pe care le notăm cu l_1, l_2 și l_3. Constatăm că l_2 este dublul lui l_1, iar l_3 este dublul lui l_2. Deci, dublând diametrul unui cerc, lungimea lui se dublează. Putem scrie $\frac{l_1}{d_1}=\frac{l_2}{d_2}=\frac{l_3}{d_3}$. În toate cazurile, diametrul se cuprinde în lungimea cercului de 3 ori rămânând un rest (vezi *figura* 6).

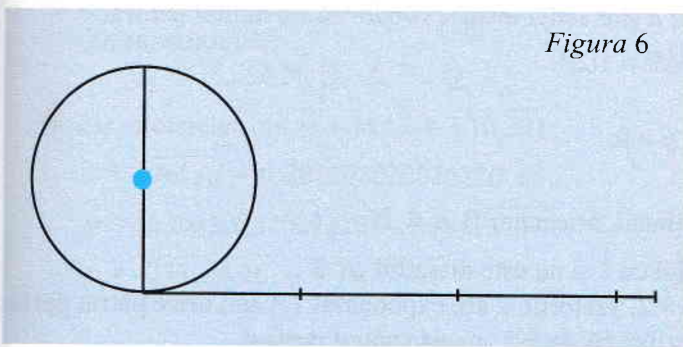


Figura 6

Calculând efectiv cu multă precizie aceste rapoarte, obținem aproximativ $3{,}14$.

Acest exemplu sugerează faptul că lungimea cercului este direct proporțională cu diametrul său. Raportul dintre lungimea cercului și diametru este constant. Numărul care exprimă acest raport se notează cu litera grecească π (se citește: *pi*).

REȚINE!

$$\pi = \frac{\text{lungimea cercului}}{\text{diametrul aceluiași cerc}}$$

Determinarea valorii lui π prin măsurarea directă nu permite o precizie suficient de bună. Încă din antichitate a existat preocuparea deosebită pentru calculul lui π.

Matematicianul și fizicianul grec *Arhimede* care a trăit în secolul al III-lea î.Hr. a demonstrat prin metode geometrice că $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Din această dublă inegalitate, se obține aproximarea lui π cu două zecimale exacte: deoarece $3\frac{10}{71} = 3{,}1408\ldots$, iar $3\frac{1}{7} = 3{,}1429$ se obține $\pi \simeq 3{,}14$.

În anul 1767, matematicianul elvețian *J. H. Lambert* a demonstrat că numărul π este irațional.

Primele zecimale ale numărului irațional π

De obicei, pentru rezolvarea problemelor practice care nu cer o precizie deosebită se folosește valoarea aproximativă $3,14$. Pentru o precizie sporită, se folosește valoarea aproximativă cu 5 zecimale 3,14159 sau aceasta se rotunjește, obținându-se valoarea aproximativă 3,1416.

Pentru memorarea ușoară a primelor zecimale ale numărului π s-au realizat, în diferite limbi, tot felul de propoziții sau poezioare care dau, prin numărul literelor ce compun cuvintele, luate în ordine, cifrele zecimale respective.

În limba română, propoziția

$$„\underbrace{\text{Așa}}_{3}\ \underbrace{\text{e}}_{1}\ \underbrace{\text{ușor}}_{4}\ \underbrace{\text{a}}_{1}\ \underbrace{\text{scrie}}_{5}\ \underbrace{\text{renumitul}}_{9}\ \underbrace{\text{și}}_{2}\ \underbrace{\text{utilul}}_{6}\ \underbrace{\text{număr}}_{5}"$$

indică primele 8 zecimale ale lui π, adică $\pi = 3,14159265\ldots$.

Probleme rezolvate

1 Fie $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13 + 2\,008$. Stabiliți dacă $\sqrt{a}$ este rațional sau irațional.

Soluție: Ultima cifră a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13$ este 0, deci ultima cifră a lui a este 8. Deoarece pătratele perfecte se pot termina doar în 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, deducem că a nu este pătrat perfect, deci $\sqrt{a}$ este număr irațional.

2 Calculați 102^2 și apoi determinați cifrele a și b astfel încât $\sqrt{\overline{106ab}}$ să fie număr natural.

Soluție: Avem $102^2 = 10\,404$. Observăm că $10\,699 > 102^2$.

$103^2 = 10\,609$

$104^2 = 10\,816 > \overline{106ab}$. Deci singura soluție este $a = 0$ și $b = 9$.

3 Demonstrați că $\sqrt{4n+2}$ este număr irațional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: $4n+2 = 2(2n+1) \Rightarrow 4n+2$ este divizibil cu 2 și nu este divizibil cu 2^2.

Deci, în descompunerea în factori a numărului $4n+2$, factorul 2 are exponentul 1. Cum orice pătrat perfect descompus în factori conține toți factorii la puteri pare, rezultă că $4n+2$ nu este pătrat perfect.

Deci: $\sqrt{4n+2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4 Se consideră numerele $A = \overline{ab}$ și $B = \overline{ba}$ cu $a > b$ cifre nenule.

a) Scrieți toate numerele A care sunt pătrate perfecte.

b) Determinați cel mai mare număr A pentru care $\sqrt{A-B}$ este număr irațional.

Soluție:

a) $A \in \{64, 81\}$.

b) $A - B = 10a + b - (10b + a) = 9(a-b)$. Pentru ca $\sqrt{A-B}$ să fie irațional este necesar ca $a-b$ să nu fie pătrat perfect. Alegem $a = 9$ și $b = 7$ pentru care $\sqrt{A-B}$ este irațional, iar A este cel mai mare număr de forma $\overline{ab}$ cu condițiile impuse.

5 Arătați că numărul $\sqrt{2^{2024} + 2^{2026}}$ este irațional.

Soluție: $\sqrt{2^{2024} + 2^{2026}} = \sqrt{2^{2024} \cdot (1 + 2^2)} = \sqrt{2^{2024} \cdot 5}$. Cum $2^{2024} \cdot 5$ se divide cu 5, dar nu se divide cu 5^2, rezultă că numărul $2^{2024} \cdot 5$ nu este pătrat perfect, deci numărul $\sqrt{2^{2024} + 2^{2026}}$ este irațional.

PROBLEME

FIXARE 🕮 EXERSARE 🕮 CONSOLIDARE

1 Fie mulțimea
$$A=\left\{0;\frac{1}{5};-\frac{7}{2};\sqrt{7};\sqrt{49};\pi;-\sqrt{144}\right\}.$$
Determinați elementele mulțimilor:
$A\cap\mathbb{N}, A\cap\mathbb{Z}, A\cap\mathbb{Q}, A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

2 Fie mulțimea
$$A=\left\{\sqrt{625};2\frac{1}{3};\left(\frac{1}{8}\right)^{-2};\pi;\sqrt{29};\frac{5}{10};\sqrt{21};3,2(5)\right\}.$$
Determinați elementele mulțimilor:
$A\cap\mathbb{N}, A\cap\mathbb{Z}, A\cap\mathbb{Q}, A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

3 Fie mulțimea
$$A=\left\{-1,5;\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{2,25};0;\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1};\frac{91}{13};1,(2);\sqrt{112};1-\sqrt{2}\right\}.$$
Determinați: a) $A\cap\mathbb{N}$;
b) $A\cap\mathbb{Z}$; c) $A\cap\mathbb{Q}$; d) $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

4 Dați câte trei exemple de elemente pentru fiecare dintre mulțimile:
$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

5 Fie numerele: $a=-3,14$; $b=\sqrt{10\,201}$;
$c=\sqrt{961}$; $d=0,202202022020220\ldots$;
$m=0,20220222022220\ldots$; $n=\sqrt{1\,464}$;
$p=\sqrt{\underbrace{55\ldots5}_{\text{de 10 ori 5}}26}$; $q=\sqrt{6^{2019}+1}$.

Copiați și completați tabelul de mai jos (rubricile corespunzătoare lui a au fost completate ca model):

	Număr natural	Număr întreg	Număr rațional	Număr irațional	Număr real
a	nu	nu	da	nu	da
b					
c					
d					
m					
n					
p					
q					

6 Dacă p este un număr natural prim, stabiliți dacă $\sqrt{p}$ este număr rațional sau irațional.

7 Precizați valorile de adevăr ale propozițiilor:
p_1: $\sqrt{9\,768}\in\mathbb{Q}$;
p_2: $\sqrt{823\,280}\in\mathbb{Q}$;
p_3: Există $n\in\mathbb{N}$, astfel încât $\sqrt{10n+3}\in\mathbb{Q}$;
p_4: $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100+7}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
p_5: Oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, numărul $\sqrt{5n+3}$ este irațional.

8 Precizați care dintre următoarele numere sunt iraționale:
a) $\sqrt{3\,249}$; b) $\sqrt{3\,450}$; c) $\sqrt{59\,365}$;
d) $\sqrt{1+3+5+\ldots+19}$; e) $\sqrt{5n+3}$, $n\in\mathbb{N}$;
f) $\sqrt{11\cdot12\cdot13\cdot\ldots\cdot19+2}$; g) $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{33\text{ cifre}}}$.

9 Fie $M=\{\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N}, n\le200\}$. Care este probabilitatea ca, dacă se ia un element la întâmplare din mulțimea M, acesta să fie irațional?

10 Determinați cifra a, astfel încât $\sqrt{\overline{16a}}$ să fie număr natural.

11 Determinați cifrele a și b, astfel încât $\sqrt{\overline{216ab}}$ să fie număr natural.

12 Arătați că: a) $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot10}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
b) $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot15}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
c) $\sqrt{1+3+5+\ldots+2\,019}\in\mathbb{Q}$.

13 Dacă $A=4^{2n+2}\cdot9^{n}-2^{4n}\cdot9^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, arătați că numărul $\sqrt{A}$ este irațional.

14 Determinați mulțimea
$$A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\sqrt{\frac{180}{x-2}}\in\mathbb{N}\right\}.$$

15 Arătați că numărul $a=\sqrt{676^2-675\cdot676-100}$ este rațional.

Lecția 5. Compararea și ordonarea numerelor reale; reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări; modulul unui număr real (definiție, proprietăți)

ACTIVITĂȚI PREGĂTITOARE

- Dacă mulțimile A și B se definesc prin $A = \{0,2; -1,2; 5,5\}$ și $B = \{0,3; -1,1; -6,5\}$, determinați mulțimile:

$$A_1 = \{a^2 \mid a \in A\} \text{ și } B_1 = \{b^2 \mid b \in B\}.$$

Pentru ce elemente $x \in A$ și $y \in B$ se verifică echivalența $x < y \Longleftrightarrow x^2 < y^2$, dacă x și y au același semn?

Se obține $A_1 = \{0,04; 1,44; 30,25\}$ și $B_1 = \{0,09; 1,21; 42,25\}$. Echivalența este verificată de:

$$x = 0,2 \text{ și } y = 0,3.$$

- Demonstrați că, dacă a, b sunt numere reale strict pozitive, atunci are loc echivalența $a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$.

Avem:

$$\left.\begin{array}{l} a < b \mid \cdot a \Longleftrightarrow a^2 < ab \\ a < b \mid \cdot b \Longleftrightarrow ab < b^2 \end{array}\right| \Longrightarrow a^2 < b^2.$$

Dacă $a^2 < b^2$ presupunând că $a \geq b$ ar rezulta contradicția $a^2 \geq b^2$. Deci din $a^2 < b^2$ rezultă $a < b$.
Am folosit proprietatea care ne permite să înmulțim ambii membri ai unei inegalități cu același număr strict pozitiv și să obținem astfel o inegalitate echivalentă.

Compararea numerelor reale

- Compararea a două numere reale de forma $\pm\sqrt{x}$.

Din proprietatea demonstrată în *activitățile pregătitoare*, ținând cont că pentru x, y numere reale pozitive, $\sqrt{x}$ și $\sqrt{y}$ sunt pozitive, avem:

✓ $\sqrt{x} < \sqrt{y} \Longleftrightarrow \sqrt{x}^2 < \sqrt{y}^2 \Longleftrightarrow x < y.$

Pentru a compara numerele reale $\sqrt{x}$ și $\sqrt{y}$ este suficient să comparăm numerele pozitive x și y.

REȚINE! $\sqrt{x} < \sqrt{y} \Longleftrightarrow x < y$, pentru orice x și y numere pozitive.

✓ Dacă numerele reale au semne diferite, atunci cel mai mare este cel pozitiv.

REȚINE! $-\sqrt{x} < \sqrt{y}$, pentru orice $x > 0$ și $y > 0$.

✓ Dacă numerele reale sunt ambele negative, atunci avem:

$$-\sqrt{x} < -\sqrt{y} \mid \cdot(-1) \Longleftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y} \Longleftrightarrow x > y.$$

REȚINE! $-\sqrt{x} < -\sqrt{y} \Longleftrightarrow x > y$, pentru orice $x > 0$ și $y > 0$.

- Compararea a două numere reale de forma $\pm a\sqrt{b}$, unde a și b sunt numere reale pozitive.
  Numerele de forma $\pm a\sqrt{b}$ se pot scrie și sub forma $\pm\sqrt{a^2 b}$ pentru a și b numere reale pozitive. Ajungem astfel în situația anterioară.

Exemple: **1.** Pentru a compara numerele reale $a = 2\sqrt{7}$ și $b = 3\sqrt{3}$, vom compara numerele obținute prin introducerea factorilor sub radicali, adică: $a = \sqrt{28}$ și $b = \sqrt{27}$, de unde $a > b$.

2. Dacă $a = -3\sqrt{5}$ și $b = -2\sqrt{12}$, atunci vom scrie $a = -\sqrt{3^2 \cdot 5}$ și $b = -\sqrt{2^2 \cdot 12}$ sau $a = -\sqrt{45}$ și $b = -\sqrt{48}$. Avem $\sqrt{45} < \sqrt{48} \Leftrightarrow a = -\sqrt{45} > b = -\sqrt{48}$.

- Compararea a două numere reale scrise sub formă zecimală.
  Parcurgem următorii pași:
  - ✓ Dintre două numere care au semne contrare, este mai mare cel pozitiv.
  - ✓ Pentru a compara două numere reale pozitive scrise sub formă zecimală, procedăm astfel:
    - Comparăm mai întâi părțile întregi. Dacă acestea sunt diferite, este mai mare numărul care are partea întreagă mai mare.
    - Dacă părțile întregi sunt egale, comparăm cifrele zecimilor. Dacă acestea sunt diferite, este mai mare numărul care are cifra zecimilor mai mare.
    - Dacă cifrele zecimilor coincid, comparăm cifrele sutimilor ș.a.m.d.
  - ✓ Dintre două numere negative, este mai mare cel care are opusul mai mic.
  - ✓ Pentru a compara două numere reale negative scrise sub formă zecimală, procedăm astfel:
    - Comparăm mai întâi părțile lor întregi. Dacă acestea sunt diferite, atunci este mai mare cel care are partea întreagă mai mare.
    - Dacă părțile întregi sunt egale, comparăm cifrele zecimilor. Dacă acestea sunt diferite, atunci este mai mare cel care are cifra zecimilor mai mică.
    - Dacă cifrele zecimilor coincid, comparăm cifrele sutimilor, ș.a.m.d.

Cu ajutorul relațiilor „ $<$ " și „ $>$ " (numite *relații de ordine strictă*) se definesc, relațiile „ $\leq$ " și „ $\geq$ " (numite *relații de ordine nestrictă*):

$a \leq b$ dacă și numai dacă $a < b$ sau $a = b$

$a \geq b$ dacă și numai dacă $a > b$ sau $a = b$

Exemple: **1.** $2{,}386\ldots > 2{,}379\ldots$ **2.** $-5{,}33491\ldots > -5{,}33492\ldots$

Reprezentarea numerelor reale pe axă

Reprezentarea pe axă a numerelor raționale este cunoscută. Reprezentarea numerelor reale se bazează pe aproximările numărului irațional prin numere raționale.

De exemplu, considerăm numărul π și valorile sale aproximative:

	Prin lipsă	Prin adaos
Aproximație de o unitate	3	4
Aproximație de o zecime	3,1	3,2
Aproximație de o sutime	3,14	3,15
Aproximație de o miime	3,141	3,142